



# MODELIZACIÓN MATEMÁTICA DE TIEMPOS DE VIAJE DEL SISTEMA TROLEBÚS

## Mathematical modeling of travel times in trolleybus system

 <sup>1</sup> Alex Eduardo Pozo Valdiviezo \*

 <sup>2</sup> Leonardo David García Medina

<sup>1</sup> Escuela Superior Politécnica de Chimborazo, Facultad de Ciencias, Riobamba, Ecuador.

<sup>2</sup> Universidad Técnica de Manabí, Facultad de Ciencias Básicas, Portoviejo, Ecuador.

\* alexpozofima93@gmail.com

### RESUMEN

En este estudio, se abordó la optimización de la movilización de los usuarios del Trolebús en la ruta que abarca las avenidas Maldonado, 10 de agosto y Galo Plaza Lasso, las cuales son transitadas por el sistema integrado Trolebús en Quito (1). El enfoque metodológico comenzó con la consideración de un desplazamiento determinista del articulado desde una parada a la siguiente, limitándose al circuito C1, que abarca un tramo de 10 kilómetros de las 22.5 kilómetros totales de la ruta (2).

Se asumió una trayectoria horizontal y recta, suponiendo que todos los semáforos permanecían en verde para mantener la velocidad constante durante el viaje. Se desarrolló un modelo matemático basado en un funcional de costo que representaba el tiempo de viaje entre paradas, sujeto a un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias que describían la dinámica del articulado en función del tiempo.

El propósito de este estudio fue la implementación del control óptimo de tiempos, utilizando el Principio del Máximo de Pontryagin (3). Para lograrlo, se realizó una simulación numérica para identificar el perfil de velocidad óptimo del articulado en esta ruta. Este enfoque proporciona una base sólida para tomar decisiones informadas y mejorar la eficiencia del transporte público de Quito.

**Palabras Clave:** *Funcional de costo, trayectoria, Principio de Máximo de Pontryagin, control óptimo.*

### ABSTRACT

In this study, the optimization of the mobilization of Trolleybus users on the route that covers the avenues Maldonado, 10 de Agosto and Galo Plaza Lasso, which are transited by the integrated Trolleybus system in Quito, was addressed. The methodological approach began with the consideration of a deterministic displacement of the articulated bus from one stop to the next, limited to the C1 circuit, which covers a 10-kilometer stretch of the 22.5 kilometers of the total 22.5 kilometers of the route.

A horizontal and straight trajectory was assumed, assuming that all traffic lights remained green in order to maintain a constant speed during the trip. A mathematical model was developed based on a functional of cost representing the travel time between stops, subject to a system of ordinary differential equations describing the dynamics of the articulated vehicle as a function of time.

The purpose of this study was the implementation of optimal time control, using Pontryagin's maximum principle. To achieve this, a numerical simulation was performed to identify the optimal

speed profile of the articulated vehicle on this route. This approach provides a solid basis for making informed decisions and improving the efficiency of Quito's public transport.

**Keywords:** *functional of cost, trajectory, Pontryagin's Maximum Principle, optimal control.*

## I. INTRODUCCIÓN

El *control óptimo*, en su esencia, constituye una técnica de modelado matemático diseñada para la óptima gestión de recursos limitados a lo largo del tiempo. Su importancia ha experimentado un notable crecimiento debido, por un lado, a su amplia aplicabilidad en diversas disciplinas, que abarcan desde la economía y las finanzas hasta la ingeniería y la biología. Por otro lado, su relevancia también se extiende al ámbito matemático, donde exige un profundo conocimiento en áreas como el análisis real, el análisis funcional y la teoría de la probabilidad, entre otros.

Inicialmente, esta teoría se basó en los principios de optimización de Pontryagin (3) y Bellman (4); sin embargo, en años recientes, ha experimentado un desarrollo notable, impulsado por desafíos emergentes en campos como la economía matemática y las matemáticas financieras. Específicamente, se enfoca en el estudio de controles y las trayectorias correspondientes que conducen a límites en *conjuntos alcanzables*, siendo el control de viaje de un vehículo un caso clásico (5-8). En este contexto, la velocidad, registrada por el velocímetro, *se retroalimenta* y compara con el perfil de velocidad en el control, lo que activa el motor para acelerar en caso de una velocidad demasiado baja o desacelerar en caso de una velocidad excesiva (9).

Por otro lado, la relevancia de este estudio reside en su capacidad para abordar un desafío crucial en el ámbito del transporte público urbano en el Distrito Metropolitano de Quito (10-11). En un mundo enfocado cada vez más en la movilidad sostenible y eficiente, comprender y optimizar los tiempos de viaje en sistemas de trolebuses integrados se convierte en una prioridad apremiante. Nuestra investigación se suma a la creciente literatura en este campo y presenta un enfoque matemático sólido para modelar y analizar estos tiempos de viaje, teniendo en cuenta factores como la velocidad máxima permitida en carriles exclusivos para trolebuses, la distancia entre paradas y la sincronización del

sistema de semaforización para garantizar que los vehículos siempre encuentren señales verdes cuando se aproximan.

Este trabajo se relaciona directamente con los artículos (12,13), dado que ambos se adentran en problemáticas relacionadas con el control óptimo y la planificación de trayectorias de vehículos, en los cuales abordan distintos enfoques. El artículo (12) se centra en la gestión de desplazamientos y elevaciones de las catenarias de una grúa, mientras que el trabajo (13) se dedica a analizar el consumo eléctrico de vehículos con motores eléctricos o híbridos. Los resultados obtenidos en estos artículos contribuyen al avance en la comprensión y la resolución de problemas de control de vehículos, lo que complementa y enriquece nuestro enfoque en la mejora del Sistema Integrado Trolebús.

Los resultados obtenidos no solo son de gran utilidad para planificadores urbanos y autoridades de transporte, sino que también tienen el potencial de mejorar la experiencia de los usuarios del sistema, reducir los tiempos de espera y promover un mayor uso del transporte público. Esto, a su vez, podría contribuir significativamente a la disminución de la congestión vehicular y las emisiones de carbono en áreas urbanas. En resumen, este artículo representa un avance importante en la optimización y mejora de los sistemas de trolebuses integrados, con implicaciones significativas para la movilidad urbana sostenible en la actualidad.

## II. MATERIALES Y MÉTODOS

### • Materiales.

En esta investigación se utilizaron los siguientes materiales:

- *Lenguaje de programación Python* – paquete GEKKO.
- Ordenador y equipos de oficina.



• **Metodología.**

La investigación se focalizó en el empleo de un modelo de control óptimo, para minimizar el tiempo total de viaje del articulado, consignado a la disminución del tiempo de viaje en cada circuito. El horizonte de optimización se establece como la distancia entre dos puntos geográficos separados por una distancia conocida, en los cuales se impone la velocidad. En la práctica, el horizonte de optimización corresponde normalmente a la distancia entre dos paradas sucesivas, así, la velocidad impuesta es igual a cero. El número mínimo de parámetros posibles para lograr el objetivo de optimización es la velocidad del articulado. Por lo tanto, la salida del control óptimo es la secuencia de valores de velocidad que generaría el tiempo de viaje más bajo, mientras se mueve el articulado entre las dos paradas en un intervalo de tiempo prescrito. La formalización de este problema se puede hacer usando la siguiente descripción y restricciones del sistema que se indican a continuación.

**Ecuación dinámica**

El articulado parte del reposo desde la parada A y es conducido por la vía hasta la parada B donde queda nuevamente en reposo. Por la Segunda Ley de Newton, la fuerza neta  $F_n$  aplicada al articulado está relacionada con la fuerza  $F_a$  debida a la aceleración dada al presionar el acelerador y con la fuerza  $F_d$  provocada por la desaceleración mediante el sistema de frenos, con lo cual se obtiene que:

$$F_n = F_a + F_d, \tag{1}$$

$$m\ddot{x}(t) = m\alpha(t) + m\beta(t), \tag{2}$$

como la masa del articulado es constante ( $m > 0$ ) entonces se arriba a la ecuación diferencial

$$\ddot{x}(t) = \alpha(t) + \beta(t). \tag{3}$$

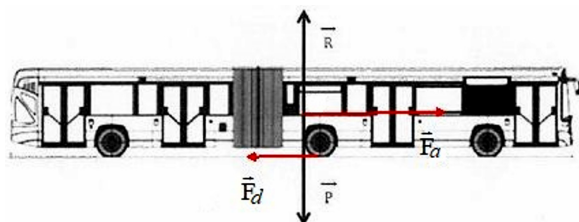


Figura. 1. Diagrama de cuerpo libre del articulado

Donde el control  $\alpha$  es la aceleración usando el acelerador y  $\beta$  es la desaceleración de frenado.

Una vez escogidas las posición y la velocidad como variables de estado, tenemos el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias

$$x_1(t) = x(t), \tag{4}$$

$$t \in [T_1, T_2]$$

$$x_2(t) = \dot{x}(t), \tag{5}$$

donde  $x \in C^1([T_1, T_2])$  con  $0 < T_1 < T_2$  los tiempos entre paradas. Luego, realizando la siguiente identificación para las variables de control admisibles  $\alpha$  y  $\beta$  vemos que

$$u_1(t) = \alpha(t), \tag{6}$$

$$t \in [T_1, T_2]$$

$$u_2(t) = \beta(t), \tag{7}$$

Resultando así el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:  $\beta$

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t) \tag{8}$$

$$t \in [T_1, T_2]$$

$$\dot{x}_2(t) = u_1(t) + u_2(t) \tag{9}$$

cabe notar que las funciones  $u_1$  y  $u_2$  son continuas a trozos. El sistema formado por (8) y (9) en forma matricial se expresa como

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} u(t), \quad t \in [T_1, T_2] \tag{10}$$

Donde  $x \in C^1([T_1, T_2], R^2)$  y el vector  $u$  es un control admisible y continuo a trozos.

**Restricciones físicas**

Mostramos que los articulados inician su desplazamiento desde la parada A y se detienen en la parada B. Cuando  $T_1 = t_0$  indicamos que el articulado abandona la parada A y  $T_2 = t_f$  el tiempo de arribo a la parada B, entonces se sigue que

$$x_1(t_0) = A, \tag{11}$$

$$x_1(t_f) = B, \tag{12}$$

Adicionalmente, como el articulado parte del reposo (parada A) y se detiene en la parada B, por consiguiente

$$x_2(t_0) = 0, \tag{13}$$

$$x_2(t_f) = 0, \tag{14}$$

Colocando en notación matricial las expresiones (11), (12), (13) y (14) obtenemos las condiciones de frontera

$$x(t_0) = \begin{bmatrix} A \\ 0 \end{bmatrix}, x(t_f) = \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}, \quad A \geq 0, \quad B > 0 \quad (15)$$

Asumimos a la vez que el articulado no retrocede, lo cual nos impone las condiciones siguientes

$$0 \leq A \leq x_1(t) \leq B, \quad \forall t \in [T_1, T_2] \quad (16)$$

$$0 \leq x_2(t) \leq 40, \quad \forall t \in [T_1, T_2]. \quad (17)$$

Teniendo en conocimiento que la aceleración es acotada superiormente por algún límite que depende de la capacidad del motor, y que la máxima desaceleración es limitada por los parámetros del sistema de frenado. Expresamos por  $M_1 > 0$  la aceleración máxima y con  $M_2 > 0$  a la desaceleración máxima, entonces los controles  $u_1$  y  $u_2$  satisfacen

$$0 \leq u_1(t) \leq M_1, \quad \forall t \in [T_1, T_2] \quad (18)$$

$$-M_2 \leq u_2(t) \leq 0, \quad \forall t \in [T_1, T_2]. \quad (19)$$

Esta formulación utiliza un perfil de referencia, el cual se supone es conocido. La importancia física de limitar la diferencia de velocidad y control (es decir, la aceleración), con respecto a los perfiles de referencia, es garantizar que la solución óptima sigue siendo realista y no produce una velocidad o aceleración incompatible con las condiciones reales.

### Modelo de control óptimo

Puesto que existen condiciones terminales tanto en el tiempo final como en la distancia final, se tienen dos enfoques para este problema:

1. La velocidad y la distancia se consideran como estados del sistema mientras que el tiempo será la variable independiente, de esta forma, se impone que los estados consigan valores predefinidos en el momento final, esto último, se da puesto que representa la longitud entre paradas sucesivas.
2. Se contempla solamente la velocidad como estado, y tener presente como variable independiente a la distancia; en este caso la restricción de la distancia es espontánea, mientras que la restricción del tiempo debe ser efectuada por separado.

En esta investigación se trabajó con el primer enfoque, a causa de que los métodos numéricos para esta orientación tienen una implementación sencilla. Por otro lado, el segundo enfoque, al contrario, es más propicio en ese sentido y representa la opción preferida, pero los métodos numéricos para la implementación son mucho más avanzados y requieren de herramientas matemáticas más potentes.

Subsiguientemente, mostramos el problema de control óptimo asociado al estudio del fenómeno de los tiempos de viaje del articulado. Vamos a considerar el vector de estados  $x = [x_1, x_2]$  (posición y velocidad). Tomamos en cuenta el sistema de ecuaciones (8)-(9)

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t),$$

$$\dot{x}_2(t) = u_1(t) + u_2(t),$$

sujeto a las condiciones (16), (17), (18) y (19). Este problema está asociado a la función de coste  $J$  definida por

$$J(u) = \int_{T_0}^{T_1} 1 dt = \int_{t_0}^{t_f} 1 dt = t_f - t_0 = \Delta t, \quad (20)$$

donde (20) representa el tiempo entre paradas consecutivas. El valor de  $t_f$  representa el tiempo al momento de completar el segmento de la vía que hay entre las paradas A y B y  $t_0$  representa el tiempo con el cual parte el articulado de la parada A.

El problema de control óptimo se escribe:

Encontrar una función  $u \in L^\infty([t_0, t_f])$  tal que la trayectoria  $x(\cdot)$  asociada al sistema (8)-(9) minimice  $J$

Esto significa que cualquiera que sea  $x = [x_1, x_2]$  (posición y velocidad objetivos en  $\Delta t$ ), hay un control  $u \in L^\infty([t_0, t_f])$  que lleva el articulado de la parada A hacia la parada B en el tiempo  $\Delta t$  (14,15).

### Existencia y unicidad

Para mostrar que existe la función  $u$  tal que minimice a la función de coste  $J$  se debe probar que el problema

$$\inf_{u \in L^\infty([t_0, t_f])} J(u) \quad (21)$$



tiene una solución única (15). Para esto, partimos de una condición inicial  $x(t_0) = \begin{bmatrix} A \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$  y se desea arribar al objetivo  $\begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}$  en un tiempo mínimo.

Consideraremos un sistema más simple con las mismas funcionalidades

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t), \quad (22)$$

$$\dot{x}_2(t) = u(t), \quad (23)$$

con  $0 \leq u_1 \leq M_2$  y  $-M_2 \leq u_2 \leq 0$  y con la restricción de velocidad  $|x_2| \leq v_{\max}$  donde  $v_{\max} = 40$  km/h.

El Hamiltoniano (16, 17-19)  $H: [t_0, t_f] \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  asociado al sistema de control lineal (22)-(23) se expresa como

$$H(t, x, p, u) = p_1 x_2 + p_2 u \quad (24)$$

Un cálculo elemental sobre las derivadas parciales del hamiltoniano muestra que

$$\nabla_x H(t, x, p, u) = -p_1 \quad (25)$$

$$\nabla_p H(t, x, p, u) = 0 \quad (26)$$

Se toma en cuenta que dado que el vector adjunto  $p = (p_1, p_2)$  no debe ser trivial,  $p_2$  no puede desaparecer en un intervalo, de lo contrario, también tendríamos  $p_1 = -\dot{p}_2 = 0$ . Aplicando el Principio de Máximo de Pontryagin (20, 5), vemos que

$$\dot{p} = \nabla_x H(t, x, p, u), \quad (27)$$

$$\dot{x} = \nabla_p H(t, x, p, u), \quad (28)$$

Juntando las expresiones en (25), (26), (27), (28) obtenemos

$$\dot{p}_1 = 0$$

$$\dot{p}_2 = -p_1$$

de donde se desprende

$$p_1 = c_1, \quad (29)$$

$$p_2 = c_2 - c_1 t, \quad (30)$$

deducimos que, en casi todas partes,

$$u(t) = \text{sgn}(c_2 - c_1 t) \quad (31)$$

con  $\text{sgn}(x)$  la función signo de  $x$ . Esas condiciones imponen dos tipos de órbitas. Entonces para  $u = u_2$

$$\dot{x}_1(t) = \frac{1}{2} u_2 t^2 + s_2 t + s_2, \quad (32)$$

$$\dot{x}_2(t) = u_2 + s_2, \quad (33)$$

de donde se desprende que

$$x_1(t) = \frac{1}{u_2} \left( \frac{1}{2} (x_2(t) - s_2)^2 + s_2 (x_2(t) - s_2) \right) + s_1 \quad (34)$$

Análogamente para  $u = -u_1$

$$x_1(t) = -\frac{1}{u_1} \left( \frac{1}{2} (x_2 - \tilde{s}_2)^2 + \tilde{s}_2 (x_2 - \tilde{s}_2) \right) + \tilde{s}_1 \quad (35)$$

Ahora con las condiciones iniciales  $x_1(t_0) = A$ ,  $x_2(t_0) = 0$ , obtenemos  $s_1 = A$ ,  $s_2 = 0$

$$x_1(t) = -\frac{1}{2u_1} (x_2(t))^2 + A. \quad (36)$$

Y así las trayectorias son por lo tanto parábolas de eje  $x$ , recorridas en la dirección creciente de  $x_2$ . Mientras que para el caso  $u = -u_1$ ; las trayectorias son, por tanto, parábolas de eje  $-x$ , recorridas en la dirección decreciente de  $x_2$ .

Estas parábolas se muestran en la Figura 2. En azul tenemos las trayectorias de aceleración ( $u = \beta$ ) y en rojo las de ruptura ( $u = -\alpha$ ). La restricción a la velocidad se logra en  $B$  desde  $A$ .

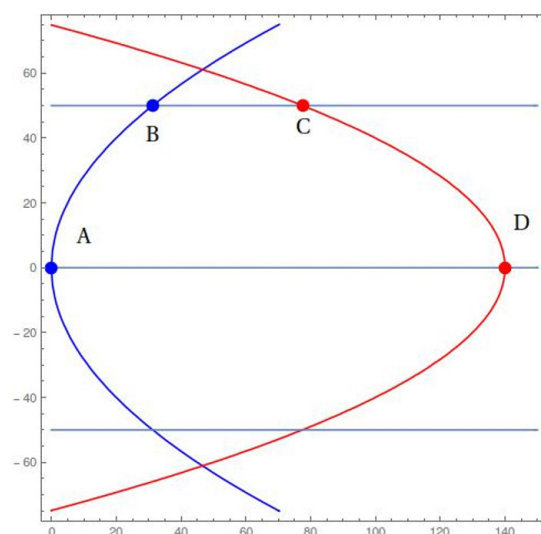


Figura 2. Momento óptimo de parada de un trolebús: trayectorias y curva de cambio.

Se debe tener en cuenta que el control óptimo se escribe como una función de retroalimentación del estado ya que tenemos

- $u = \beta$  si  $x$  está por debajo de la curva de conmutación en este caso, es necesario acelerar.
- $u = \alpha$  si  $x$  está por encima de esta curva en este caso, es necesario desacelerar.

De  $B$  a  $C$  tenemos el sistema

$$\dot{x}_1(t) = x_2, \quad (37)$$

$$\dot{x}_2(t) = 0, \quad (38)$$

lo que da

$$x_1(t) = v_{max}t + s_1 \quad (39)$$

$$x_2(t) = v_{max}, \quad (40)$$

por lo que la trayectoria de tiempo mínimo de  $A$  a  $D$  es  $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D$ . A partir de esos datos podemos calcular fácilmente  $t_f$  y así

$$t_f = \frac{x_1 - s_1}{v_{max}} = \frac{x_1 - A}{40} = \frac{x_1 - A}{40} \quad (41)$$

A partir de la ecuación (29) se obtiene la solución, en función de  $t$ , para la ecuación

$$x_1(t) = \begin{cases} \frac{\beta}{2} (t - t_0)^2 + A & \text{Si } t_0 \leq t \leq t^* \\ \frac{\alpha}{2} (t - t_f)^2 + B & \text{Si } t^* \leq t \leq t_f \end{cases} \quad (42)$$

$$x_2(t) = \begin{cases} \beta (t - t_0) & \text{Si } t_0 \leq t \leq t^* \\ -\alpha (t - t_f) & \text{Si } t^* \leq t \leq t_f \end{cases} \quad (43)$$

donde se observa que el cambio de velocidad tiene lugar en el momento  $t^*$  (*switching time*). Tanto la distancia,  $x_1$  y la velocidad en,  $x_2$ , son continuas en  $t = t^*$ , se debe tener que

$$\beta (t^* - t_0) = -\alpha (t^* - t_f), \quad (44)$$

$$\frac{\beta}{2} (t^* - t_0)^2 + A = -\frac{\alpha}{2} (t^* - t_f)^2 + B \quad (45)$$

Al despejar  $t^*$  de las ecuaciones (42) y (43) tenemos que el *switching time* (21) viene dado por

$$t^* = \sqrt{\frac{2\alpha(B-A)}{\beta(\alpha+\beta)}}. \quad (46)$$

y del cual se desprende que el tiempo óptimo  $\Delta t$  es

$$\Delta t = \sqrt{\frac{2(\alpha+\beta)(B-A)}{\alpha\beta}}. \quad (47)$$

Así vemos que el problema está determinado y el control óptimo está descrito por (29) la cual presenta una discontinuidad en  $t = t^*$  y solamente toma sus valores máximos,  $\beta$ , y mínimo,  $\alpha$ . A este tipo de control se lo denomina *bang-bang* y se caracteriza por tomar valores iguales a uno, es decir,  $\alpha = \beta = 1$ . Por ende, el *switching time* y el desplazamiento  $x_1$  en  $t^*$  se expresan como sigue

$$t^* = \sqrt{B-A}, \quad (48)$$

$$x_1(t^*) = \frac{(B+A)}{2}. \quad (49)$$

Donde la ecuación (47) indica que la máxima velocidad se alcanza en el punto intermedio entre paradas contiguas, dado que la aceleración máxima se aplica desde el principio y se invierte en el punto medio. Esto supone, por supuesto, que no hay fricción ni velocidad terminal que se pueda lograr a lo largo del camino.

### Preparación del código

Se realizó la programación de un *script* con una codificación destinada a establecer los perfiles de desplazamiento, velocidad y aceleración óptimos, tomando en cuenta la documentación de la librería *GEKKO* y la teoría de control óptimo asociada a este tipo de modelos (1).

### Implementación del modelo

Con este modelo de control de tiempo óptimo, se realizó las simulaciones para el perfil de velocidad, aceleración y desplazamiento entre dos paradas consecutivas  $A$  y  $B$  que distan en 400m (2) y considerando que la velocidad máxima permitida para un articulado del trolebus es de 40km/h; a su vez se consideró que el articulado avanza en un intervalo de tiempo  $[0, T]$ , con  $T \approx 108$  seg



representando el tiempo total al recorrer las 75 paradas del trolebús. Con estos datos procesados se obtuvieron 4 gráficas:

- Gráfica del desplazamiento del articulado en función del tiempo.
- Gráfica de la velocidad del articulado en función del tiempo.
- Gráfica de la aceleración (control *bang-bang*) del articulado en función del tiempo.
- Gráfica del perfil de velocidad versus el desplazamiento.

### III. RESULTADOS

Los resultados se presentan en tablas y gráficas, que detallan la información de la variable espacial con valores de las distancias entre paradas consecutivas y, además, contiene la información de la variable temporal con valores entre 0 y  $T > 0$ .

En la Tabla 1 notamos los valores del tiempo óptimo y velocidad óptima durante el trayecto entre la parada A y la parada B, calculados con el lenguaje de programación Python, en particular, el paquete GEKKO (22).

Tiempo óptimo y velocidad óptima del articulado al desplazarse entre paradas consecutivas		
Distancia entre paradas en km	Tiempo óptimo $\Delta t$ en horas	Velocidad óptima en km/h
0.4	0.01	30.26

Tabla 1. Valores del tiempo óptimo  $\Delta t$  y de la velocidad óptima.

En la Tabla 2 notamos los valores del tiempo óptimo durante el trayecto entre la parada Estación de Quitumbe y la Estación El Labrador.

Tiempo óptimo del articulado al desplazarse entre las estaciones Quitumbe y El Labrador	
Distancia entre paradas en km	Tiempo óptimo $\Delta t$ en horas
25,5	1,005

Tabla 2. Valores del tiempo óptimo  $\Delta t$  y de la velocidad óptima para todo el Sistema Integrado Trolebus.

En la Figura 3 notamos que la aceleración del articulado se comporta como un control bang-bang, donde el articulado mantiene una aceleración constante de  $1\text{ m/s}^2$  hasta el punto de *switching*, para luego disminuir la aceleración, debido al sistema de frenado, a un valor constante de  $1\text{ m/s}^2$ .

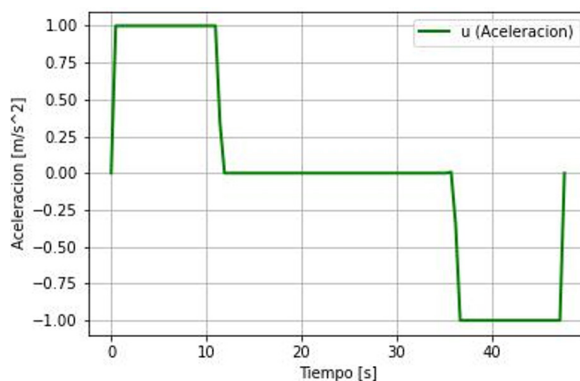


Figura 3. Perfil de la aceleración óptima (control bang-bang).

En la Figura 4 observamos que la velocidad del articulado parte del reposo al tiempo  $t_0 = 0$  s y esta va aumentando de forma constante en los primeros durante hasta alcanzar la velocidad máxima permitida de  $11,11\text{ m/s} = 40\text{ km/h}$  la cual se mantiene constante durante los 15 s siguientes, para luego disminuir su velocidad hasta llegar con velocidad cero en el tiempo  $t_f = 48$  s.

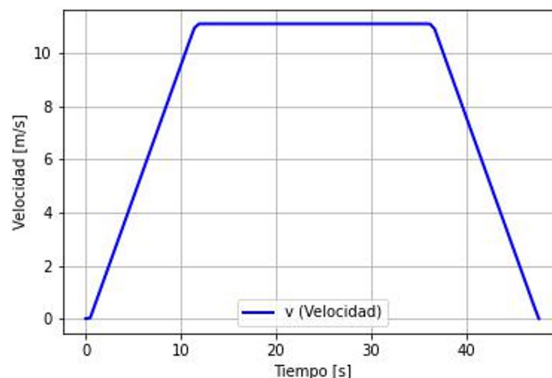


Figura 4. Perfil de la velocidad óptima.

En la Figura 5 se muestra la posición del articulado respecto al tiempo, esta gráfica permitirá identificar que la trayectoria es una función creciente sin presentar alteraciones durante el trayecto entre las paradas A y B.

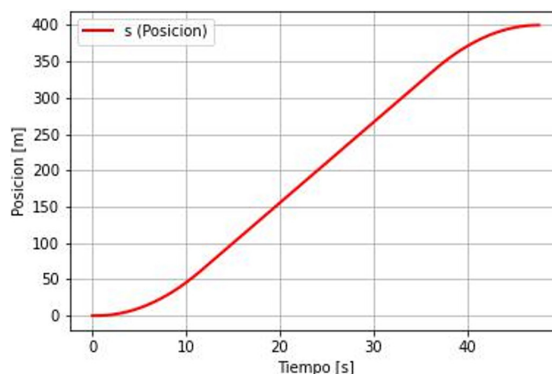


Figura 5. Perfil de la posición (del articulado) óptima.

En suma, la Figura 6 pone en manifiesto el perfil de velocidad óptimo que el articulado deberá seguir durante el trayecto entre dos paradas consecutivas. Se percibe que el articulado parte de la parada A con una velocidad igual a cero y conforme avanza durante los primeros 100 metros, aumenta paulatinamente la velocidad hasta alcanzar la velocidad máxima permitida  $11,11 \text{ m/s} = 40 \text{ km/h}$  para mantenerla durante 300 metros y luego disminuirla suavemente para llegar con velocidad cero a la parada B

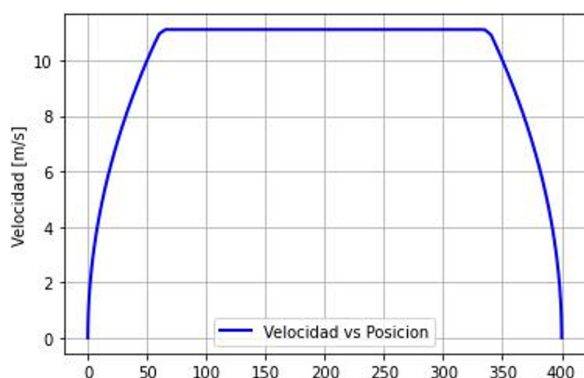


Figura 6. Perfil de la velocidad (del articulado) respecto a la posición.

#### IV. DISCUSIÓN

El presente trabajo tiene como finalidad mostrar que la teoría de Control Óptimo puede ayudar a los problemas de movilidad de pasajeros del Sistema Integrado Trolebús, lo cual se logra explicar con los resultados presentados, además se recalca que existen variables que no fueron consideradas en el modelo como es el caso de la velocidad del viento, fricción, tipo de vía, número de semáforos (20,21), por ende, estas simplificaciones permitieron tener un modelo sintético que permite un análisis más flexible. También, esta simplificación podría desvirtuar los resultados.

El estudio nos permite demostrar el efecto de controlar la velocidad del articulado durante todo su trayecto, lo cual motiva a profundizar su estudio y a generar escenarios que permitan desarrollar mejores planificaciones en cuestiones de movilidad, más aun, a valorar la importancia de la modelización matemática en temas de movilización.

A partir de la Tabla 2 se evidencia que el tiempo óptimo del articulado al desplazarse entre las estaciones Quitumbe y El Labrador es menor al

tiempo de viaje registrado por la Empresa Pública Metropolitana de Transporte de Pasajeros de Quito (EPMT PQ), además, cuando se hace el recorrido por las 76 paradas y se examina los tiempos de viaje entre ellas, se obtiene un tiempo total 2,56 horas. Por consiguiente, al unir estos 76 datos, uno a continuación de otro, se obtiene una gráfica del tiempo, como se observa en la Figura 7.

A su vez, se evidencia que las gráficas del tiempo acumulado presentan una tendencia lineal creciente, destacando que la recta obtenida con el modelo está por debajo de la gráfica de los datos proporcionados, ratificando así que los resultados obtenidos con el modelo son bastante aceptables.

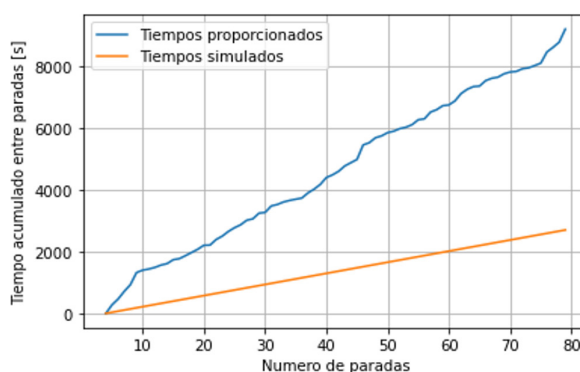


Figura 7. Perfil de la velocidad (del articulado) respecto a la posición.

Por otra parte, los tiempos óptimos se obtuvieron a través de la resolución del problema de tiempo óptimo, que en el presente trabajo muestra una disminución del 39 % en el tiempo total de viaje, porcentaje considerable que surge de la información en la Tabla 2, y confirma el buen ajuste del modelo y su significativa predicción del tiempo óptimo.

En el ámbito de la investigación relacionada con simulaciones de control óptimo de tiempo mínimo, destacan varios estudios relevantes llevados a cabo por investigadores como Dal Bianco, Lot y Gadola (23), Cots (13), Saccon (24), Pickhardt (9), y Li, Wang y Shao (25). Estos trabajos se centran en la aplicación de simulaciones de tiempo mínimo en escenarios que involucran vehículos siguiendo trayectorias predefinidas y abordan aspectos detallados del modelo, que incluyen la dinámica completa del chasis, los movimientos de la suspensión, las maniobras de las ruedas, el consumo de energía eléctrica, así como los movimientos simultáneos de desplazamiento y elevación de las catenarias.





Es importante destacar que el estudio de Li, Wang y Shao (25) se concentra en vehículos articulados utilizados para el transporte de carga, los cuales deben navegar por carreteras sinuosas o congestionadas con el objetivo de llegar a una posición objetivo en el menor tiempo posible, mientras cumplen con restricciones de aceleraciones laterales y longitudinales para evitar el fenómeno conocido como el efecto tijera. Estos trabajos proporcionan una visión detallada de la complejidad intrínseca que implica la formulación de un modelo de control óptimo cuando se consideran múltiples variables y restricciones. En resumen, estas investigaciones son fundamentales para comprender y abordar los desafíos relacionados con el control óptimo en contextos de tiempo mínimo, lo que tiene aplicaciones significativas en una amplia gama de campos, desde la ingeniería de vehículos hasta la movilidad eléctrica y la planificación de rutas en entornos complicados.

## V. CONCLUSIONES

Este estudio ha proporcionado una comprensión profunda del comportamiento de los articulados en el sistema Trolebús del Distrito Metropolitano de Quito. Además, hemos logrado obtener el perfil de velocidad óptima en la ruta analizada, lo que sienta las bases para la formulación de estrategias a corto, mediano y largo plazo. Estas estrategias tienen el potencial de reducir la congestión vehicular y mejorar significativamente la movilización de pasajeros en el Distrito Metropolitano de Quito.

## VI. REFERENCIAS

1. Inicio [Internet]. Corredores del Sistema; [consultado el 7 de septiembre de 2022]. Disponible en: <https://www.trolebus.gob.ec/index.php/gestion/nuestras-paradas>
2. Pozo Valdiviezo, A Modelización matemática de tiempos de viaje de la Troncal Central Trolebús. [Internet]. Quito: UCE; 2019 [citado: 2022, diciembre]
3. Pontryagin LS, etc., editores. Mathematical theory of optimal processes. Nashville, TN, Estados Unidos de América: John Wiley & Sons; 1962.
4. Bellman R. Introduction to the mathematical theory of control processes: Linear equations and quadratic criteria v. 1. San Diego, CA, Estados Unidos de América: Academic Press; 1968.
5. Evans LC. An introduction to mathematical optimal control theory version 0.2 [Internet]. Berkeley.edu. [citado el 29 de diciembre de 2022]. Disponible en: <https://math.berkeley.edu/~evans/control.course.pdf>
6. Knowles G. Introduction to applied optimal control. San Diego, CA, Estados Unidos de América: Academic Press; 1982.

Un hallazgo importante es que los tiempos registrados por la Empresa Pública Metropolitana de Transporte de Pasajeros de Quito son mayores que los tiempos obtenidos a través de nuestro modelo de control de tiempo óptimo. Esto indica que nuestro modelo puede ofrecer estimaciones más precisas de los tiempos de viaje óptimos en la Troncal Central Trolebús. Esta información será invaluable para prever y abordar los desafíos causados por la falta de planificación y organización en el sistema de transporte.

En la actualidad, existen diversos modelos matemáticos basados en ecuaciones físicas que pueden integrar factores como velocidad, aceleración y fricción en el movimiento de los articulados durante su recorrido. El estudio proporciona una base sólida para la toma de decisiones en la planificación y gestión del sistema de transporte público en el Distrito Metropolitano de Quito, con el potencial de mejorar la eficiencia y la calidad del servicio ofrecido a los pasajeros, al tiempo que contribuye al avance de la ciencia y la planificación urbana en general.

## VI. AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen a la Empresa Pública Metropolitana de Transporte de Pasajeros de Quito por proporcionar los datos de los tiempos de viaje en cada una de las paradas del sistema Trolebús y los comentarios constructivos de los revisores anónimos.

7. Kirk DE. Optimal Control Theory: An Introduction. Dover Publications; 2012.
8. Lewis FL, Vrabie D, Syrmos VL. Optimal Control: Lewis/optimal control 3e. 3a ed. Chichester, Inglaterra: John Wiley & Sons; 2012.
9. Pickhardt R. Time- and energy-optimal control of an electric railcar. En: ITSC2000 2000 IEEE Intelligent Transportation Systems Proceedings (Cat No00TH8493). IEEE; 2002.
10. de Movilidad S. DIAGNÓSTICO DE LA MOVILIDAD EN EL DISTRITO METROPOLITANO DE QUITO PARA EL PLAN METROPOLITANO DE DESARROLLO TERRITORIAL (PMOT) [Internet]. Gob.ec. [consultado el 24 de septiembre de 2022]. Disponible en: <https://gobiernoabierto.quito.gob.ec/wp-content/uploads/documentos/pdf/diagnosticomovilidad.pdf>
11. Carrion A, Goetschel AM, Sanchez N. BREVE HISTORIA DE LOS SERVICIOS EN LA CIUDAD DE QUITO COORDINADOR MARIOVASCONEZ [Internet]. Edu.ec. [consultado el 24 de septiembre de 2022]. Disponible en: <https://biblio.flacsoandes.edu.ec/libros/digital/49071.pdf>
12. Hu GS, Ong CJ, Teo CL. Minimum-time control of a crane with simultaneous traverse and hoisting motions. J Optim Theory Appl [Internet]. 2004;120(2):395–416. Disponible en: <http://dx.doi.org/10.1023/b:jota.0000015690.02820.ea>
13. Cots O. Geometric and numerical methods for a state constrained minimum time control problem of an electric vehicle. ESAIM Control Optim Calc Var [Internet]. 2017;23(4):1715–49. Disponible en: <http://dx.doi.org/10.1051/cocv/2016070>
14. Bressan A, Piccoli B. Introduction to the mathematical theory of control. 2007.
15. Ern A. Contrôle de modèles dynamiques [Internet]. Enpc.fr. [citado el 29 de diciembre de 2022]. Disponible en: <http://cermics.enpc.fr/~ern/MAP434/poly.pdf>
16. Trélat E. Contrôle optimal : théorie et applications [Internet]. Upmc.fr. [citado el 29 de diciembre de 2022]. Disponible en: <https://www.ljll.math.upmc.fr/trelat/fichiers/livreopt.pdf>
17. Athans M, Falb PL. Optimal control: An introduction to the theory and its applications. Dover Publications; 2013.
18. Alekseev VM, Tikhomirov VM, Fomin SV. Optimal control. 1987.
19. Strauss A. An introduction to optimal control theory. 1968a ed. Berlín, Alemania: Springer; 2012.
20. Beal L, Hill D, Martin R, Hedengren J. GEKKO Optimization Suite. Processes (Basel) [Internet]. 2018 [citado el 29 de diciembre de 2022];6(8):106. Disponible en: <https://www.mdpi.com/2227-9717/6/8/10>
21. Boscain U, Piccoli B. Optimal syntheses for control systems on 2-D manifolds. 2004a ed. Berlin, Germany: Springer; 2003.
22. de Dios Ortuzar J, Willumsen LG. Modelling Transport. 4a ed. Standards Information Network; 2011.
23. Dal Bianco N, Lot R, Gadola M. Minimum time optimal control simulation of a GP2 race car. Proc Inst Mech Eng Pt D: J Automobile Eng [Internet]. 2018;232(9):1180–95. Disponible en: <http://dx.doi.org/10.1177/0954407017728158>
24. Saccon A. Minimum time maneuver for a nonholonomic car with acceleration constraints: Preliminary results. En: Proceedings of the 2005 IEEE International Symposium on, Mediterrean Conference on Control and Automation Intelligent Control, 2005. IEEE; 2005.
25. Li B, Wang K, Shao Z. Time-optimal trajectory planning for tractor-trailer vehicles via simultaneous dynamic optimization. En: 2015 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS). IEEE; 2015.